Mathematatik Abiturwissen

1. Einführung

1.1 Zahlenbereiche:

N natürliche Zahlen
Z ganze Zahlen
Q rationale Zahlen
R reelle Zahlen
C komplexe Zahlen

Natürliche Zahlen **N** = { 0,1,2,3,…}
Operationen: +, -, *, /

Regeln:
- Existenz der Summe
- Eindeutigkeit der Summe
- Kommutativität (a+b = b+a | a*b = b*a)
- Assoziativität ((a+b)+c = a+(b+c) | (a*b)*c = a*(b*c))
- Distributivität (a*(b+c) = ab+ac)

Axiom: Erklärung von Grundbegriffen, die ohne Beweis an den Anfang einer Theorie gestellt werden.
Definition: Erklärung eines neuen Begriffs durch Rückführung auf schon bekannte
Satz: Aussage die aus einer anderen Aussage folgt und deshalb bewiesen werden muss
Beispiel: Euklidisches Parallelenaxiom
Peano’sches Axiomensystem
“1“ ist eine natürliche Zahl
zu jeder natürlichen Zahl gibt es genau einen Nachfolger, der wieder eine natürliche Zahl ist
Es gibt keine natürliche Zahl deren Nachfolger 1 [0] ist
Verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger
Enthält eine Menge natürlicher Zahlen die Zahl “1“ und mit jeder natürlichen Zahl n auch den Nachfolger n+1 so erhält sie alle natürlichen Zahlen
[meist wird auch die 0 als natürliche Zahl betrachtet]

Differenz uneingeschränkt ausführbar → ganze Zahlen
Division m/n mit n ≠ 0 uneingeschränkt ausführbar → rationale Zahlen
$(a)^{½}$ mit a ≥ 0 uneingeschränkt ausführbar → reelle Zahlen
$(a)^{½}$ für beliebige a uneingeschränkt ausführbar → komplexe Zahlen

Rechenregeln:

-(a+b) = -a-b	(a/b)±(c/d) = (ad±cb)/(bd)
-(-a) = a	a(1/b)= a/b
(-a)*(-b) = ab	b = 1/c ⇒ a/**(**1/c**)** = ac
(-a) b = -ab = a (-b)	**(**a/b**)**/c = a/(bc)
(a+b)(c-d) = ac-ad+bc-bd	a/(b/c) = ac/b
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	(a/b)/(c/d) = ad/bc
(a/c)±(b/c) = (a±b)/c	

1.2 Mathematische Logik

Mathematische Logik beschäftigt sich mit der Struktur mathematischer Aussagen

Definition: Eine **Aussage** ist ein sinnvolles sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist

Wesentlich ist:
- der Wahrheitswert kann festgestellt werden
- nur die beiden Wahrheitswerte wahr (w) und falsch (f) sind möglich (Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten)
- Eine Aussage kann nicht gleichzeitig wahr und falsch sein (Prinzip der Widerspruchsfreiheit)

Beispiel: „5 ist eine Primzahl“ (w), „7 ist durch 3 teilbar (f), „heute ist schönes Wetter“ (keine Aussage)

Enthält eine sprachliches Gebilde variable Teile, so kann sein Wahrheitswert nicht festgestellt werden → keine Aussage (sondern eine Aussageform)
Eine Aussageform wird zu einer Aussage, wenn die Variablen mit Werten belegt werden oder durch Quantoren „gebunden“ werden.

Beispiel: $x^2+2x+1=0$

Verknüpfung von Aussagen

Negation „nicht A“
Konjunktion „A und B“
Disjunktion „A oder B“
Implikation „wenn A dann B“ $A \Rightarrow B$
„A ist hinreichend für B“ bzw. „B ist notwendig für A“
Äquivalenz „A genau dann, wenn B“ $A \Leftrightarrow B$
„A ist hinreichend und notwendig für B“

Beispiel: A: „n ist durch 6 teilbar“
B: „n ist durch 3 teilbar“
„n ist durch 6 teilbar“ $\Rightarrow$ „n ist durch 3 teilbar“ ($A \Rightarrow B$)
die Teilbarkeit durch 6 ist hinreichend für die Teilbarkeit durch 3
die Teilbarkeit durch 3 ist notwendig für die Teilbarkeit durch 6

Beispiel: A: „n<6“ B: „n<7“
„n<6“ $\Rightarrow$ „n<7“
„n<6“ ist hinreichend für „n<7“
„n<7“ ist notwendig für „n<6“

A	B	Nicht A	A und B	A oder B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Bemerkung: Aus einer falschen Aussage kann durch richtige Schlussweise eine wahre Aussage gefolgert werden.

Beispiel: -1 = 1 (f) quadrieren $\Rightarrow$ 1=1 (w)
$a = b \Rightarrow a^2 = b^2$
$|a| = |b| \Leftrightarrow a^2 = b^2$

Prioritäten von Verknüpfungen

Operationen: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Satz:
$p \wedge p = p$
$p \wedge q \vee r \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ (Beweis siehe unten)
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$ (Grundlage für indirekten Beweis)
$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

$$\left.\begin{array}{l} \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \end{array}\right\} \text{de Morgansche Regeln}$$

Beweis:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg$ p	$\neg$ p $\vee$ q
w	w	w	f	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

$\Rightarrow$ Aussage ist wahr

Quantoren:

Definition: $\forall$ „für alle …“, „für jedes …“
$\exists$ „es gibt ein …“, „es existiert ein …“

Beispiel: $\forall\, x \in \Re: x^2 \geq 0$ oder $\forall\, x \in \Re, x \geq 3: x^2 \geq 9$

Bemerkung: Man kann die Negation einer mit Hilfe von Quantoren formulierten Aussage bilden, indem man die beiden Quantoren vertauscht und alle enthaltenen Aussagen negiert.

Beispiele:
$\forall\, x \in \Re: x^2 \geq 0$ (w) negiert $\Rightarrow$ $\exists\, x \in \Re: x^2 < 0$ (f)
$\exists\, x \in \Re: x = 3$ (w) negiert $\Rightarrow$ $\forall\, x \in \Re: x \neq 3$ (f)
$\forall\, n \in \aleph\ \exists\, m \in \aleph: n > m$ (f) negiert $\Rightarrow$ $\exists\, n \in \aleph\ \forall\, m \in \aleph: n \leq m$ (w)

Bemerkung: wenn der Zusammenhang klar ist können die Quantoren weggelassen werden

1.3. Mengenlehre

1.3.1 Definition von Mengen

Cantor: „Menge ist die Zusammenfassung gewisser unterscheidbarer Elemente zu einem neuen Ganzen“

Problem: Ein Barbier rasiert alle Dorfbewohner, die sich nicht selbst rasieren
M = {Dorfbewohner, die sich nicht selbst rasieren}

Annahme: Der Barbier rasiert sich nicht selbst
$\Rightarrow$ er wird vom Barbier rasiert, also muss er sich selbst rasieren $\Rightarrow$ WIDERSPRUCH

Praktisch betachtet man deshalb Elemente, die selbst nicht als Mengen aufgefasst werden.

Eine Menge kann durch die Eigenschaften ihrer Elemente beschrieben werden. Ist $H(x)$ eine solche Eigenschaft so wird durch

$M = \{ x \mid H(x) \}$

eine Menge definiert.

Definition: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x: (x \in A \Rightarrow x \in B)$ [A ist Teilmenge von B]

Gleichheit von Mengen

$A = B \Leftrightarrow \forall x: (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \forall x: (x \in B \Rightarrow x \in A)$

$\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

leere Menge $\varnothing = \{ x \mid x \neq x \}$

Die Potenzmenge einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M also

$P_M = \{ X \mid X \subseteq M \}$

Beispiel: $M = \{1,2,3\}$ $P_M = \{\{\varnothing\},\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

$\varnothing \subseteq M \Leftrightarrow \forall x: (x \in \varnothing \Rightarrow x \in M) \Rightarrow$ immer wahr, da $x \in \varnothing$ immer falsch ist

$\varnothing \neq \{\varnothing\}$

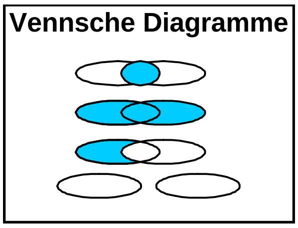
1.3.2 Operationen mit Mengen

Definition: $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ Durchschnitt

$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B\}$ Vereinigung

$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ Differenz

A und B disjunkt wenn $A \cap B = \varnothing$



Eigenschaften: $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

$A \cap B = B \cap A$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

$A \cup (B \cap A) = A$

$A \subseteq B \Rightarrow \forall C\, ((A \cup C \subseteq B \cup C) \wedge (A \cap C \subseteq B \cap C))$

$\forall X\, (A \subseteq X \wedge B \subseteq X) \Rightarrow A \cup B \subseteq X$

$A \setminus B \subseteq A$

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ ⚠

Beweis: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$A \setminus (B \cup C) = \{x \mid x \in A \wedge x \notin (B \cup C)\}$

$x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in (B \cup C)) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B) \wedge \neg(x \in C) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B) \wedge x \in A \wedge \neg(x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)$

$\{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)\} = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

1.3.3 Karthesisches Produkt von Mengen

Bei Mengen spielt nur die Zugehörigkeit zu einer Menge eine Rolle, nicht die Reihenfolge der Elemente.
Spielt die Reihenfolge von Elementen eine Rolle so muss man statt Mengen mit **n-Tupeln** arbeiten.

Definition: Ein geordnetes Paar (a,b) ist definiert durch die Menge: $(a,b) = \{ \{a,b\} , \{a\} \}$
Bemerkung: Es gilt $\{a,b\} = \{b,a\}$ aber $\{ \{a,b\} , \{a\} \} = (a,b) \neq (b,a) = \{ \{a,b\} , \{b\} \}$

Definition: n-Tupel

$$\begin{cases} a_1 & n=1 \\ (a_1, \ldots , a_n) = (a_1,a_2) & n=2 \\ (a_1, \ldots , a_n) = ((a_1,\ldots,a_{n-1}),a_n) & n>2 \end{cases}$$

Definition: karthesisches Produkt

$A \times B = \{ (a,b) \mid a\in A \wedge b\in B \}$
$A_1 \times \ldots \times A_k = \{ (a_1, \ldots, a_k) \mid a_1\in A_1 \wedge \ldots \wedge a_k\in A_k \}$
Ist $A_1 = \ldots = A_k = A$, so schreibt man A^k statt $A \times \ldots \times A$

Beispiel:
$A = \{1,2,3\} , B = \{3,4\}$
$A \times B = \{ (1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4) \}$

$R^2 = R \times R, \quad R^3 = R \times R \times R$

1.3.4 Relationen, Abbildungen, Funktionen

Definition: *Relation*: Eine n-stellige Relation R in einer Menge M ist eine Teilmenge von M^n das heißt $R \subseteq M^n$.
Eine 2-stellige Relation heißt auch binäre Relation.
Als Schreibweise ist statt $(a,b)\in R$ auch aRb üblich.
Beispiel:
M={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}
aRb= „a ist halb so groß wie b"
$R=\{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8),(5,10)\} \subset M \times M$

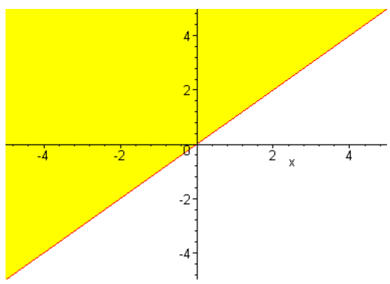


Abb.1

Beispiel:
$a \leq b$, $a,b\in \Re$ [$\leq$ ist die Relation] (siehe Abb.1)

Beispiel:
$aRb = a^2 + b^2 = 4, \quad a,b\in \Re$ (siehe Abb.2)

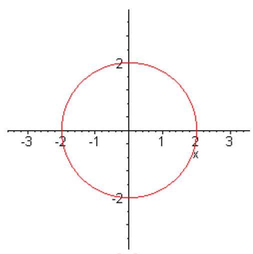


Abb.2

Beispiel:
relationale Datenbanken

Definition:

Abbildungen: Sind A und B zwei nicht notwendig verschiedene Mangen so heißt F Abbildung wenn $F \subseteq A \times B$
Schreibweise: F(a)=b

Definition:

$Db = \{ a \in A \mid \exists\, b \in B : F(a)=b \}$ Definitionsbereich
$Wb = \{ b \in B \mid \exists\, a \in A : F(a)=b \}$ Wertebereich

F ist eine Abbildung aus	A in	B, Wenn $Db \subset$	A, $Wb \subset$	B
F ist eine Abbildung von	A in	B, Wenn $Db =$	A, $Wb \subset$	B
F ist eine Abbildung aus	A auf	B, Wenn $Db \subset$	A, $Wb =$	B
F ist eine Abbildung von	A auf	B, Wenn $Db =$	A, $Wb =$	B

Die inverse Abbildung von F ist $F^{-1} = \{ (b,a) \mid (a,b) \in F \} \subseteq B \times A$
Schreibweise: $F^{-1}(b)=a$ wenn $a=F(b)$

Definition: Eine Abbildung $F: A \to B$ heißt:

eindeutig	wenn jedem Element $a \in Db \subseteq A$ genau ein Element $b \in Wb \subseteq B$ zugeordnet ist.
injektiv	wenn die inverse Abbildung ebenfalls eindeutig ist
surjektiv	wenn der Wertebereich der Menge B entspricht (Wb=B)
bijektiv	wenn die Abbildung injektiv und surjektiv ist

Bemerkung:

Man kann den Begriff „eindeutig“ formal schreiben als:
$\forall\, a_1, a_2 \in Db: a_1 = a_2 \Rightarrow F(a_1) = F(a_2)$ oder
$\forall\, a_1, a_2 \in Db: F(a_1) \neq F(a_2) \Rightarrow a_1 \neq a_2$

1.4 Beweismethoden

1.4.1 direkter Beweis

wahre Aussage $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ neue Aussage

Beispiel:

Aussage: $\forall x \geq 1$ gilt $6x + 3 \geq 3x + 6$
Beweis:
$x \geq 1 \Rightarrow 3x \geq 3 \Rightarrow 6x \geq 3x + 3 \Rightarrow 6x + 3 \geq 3x + 6$ q.e.d.

Beispiel:

$(a+b)/2 \geq (a+b)^{1/2}$
$\Rightarrow ((a+b)^2)/4 \geq ab$
$\Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$
$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$
$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$
$\Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$ FEHLER! Richtig nur für $a,b \geq 0$ wegen der ersten Umformung (quadrieren)

Beispiel: (fehlerhafter Beweis)

	-20	=	-20	
$\Leftrightarrow$	$16-36$	=	$25-45$	
$\Leftrightarrow$	$16-36+(81/4)$	=	$25-45+(81/4)$	
$\Leftrightarrow$	$(4-(9/2))^2$	=	$(5-(9/2))^2$	
$\Rightarrow$	$4-(9/2)$	=	$5-(9/2)$	FEHLER! richtig: $\Rightarrow$ $\lvert 4-(9/2)\rvert = \lvert 5-(9/2)\rvert$
$\Leftrightarrow$	4	=	5	$\Leftrightarrow$ $\lvert -0{,}5\rvert = \lvert 0{,}5\rvert$

ist so keine geeignete wahre Aussage zu finden kann man versuchen von der Negation der neuen Aussage auszugehen.

1.4.2 indirekter Beweis

bedeutet $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$

Beispiel:

Behauptung: $a,b \geq 0 \Rightarrow (a+b)/2 \geq (a+b)^{1/2}$, direkter Beweis wäre auch möglich

indirekter Beweis:

$(a+b)/2 < (a+b)^{1/2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow (a-b)^2 < 0$ Widerspruch $\Rightarrow$ Behauptung ist wahr

Behauptung: $2^{1/2}$ ist irrational, $\neg B$: $2^{1/2}$ ist rational

indirekter Beweis:

$2^{1/2} = p/q$ mit p,q teilerfremd, $q \neq 0$

$(2^{1/2})q = p \Rightarrow 2q^2 = p^2$ ($\Rightarrow$ p ist gerade, ersetze p durch 2r) $\Rightarrow 2q^2 = 4r^2 \Rightarrow q^2 = 2r^2$ ($\Rightarrow$ q ist gerade)

Widerspruch (da p und q 2 als Faktor enthalten) $\Rightarrow$ Behauptung ist wahr

1.4.3 vollständige Indunktion

Zum Beweis von Behauptungen die für alle natürlichen Zahlen ab einem n_0 gelten.

zwei Teile: 1. Induktionsanfang
2. Induktionsschritt
   a) Induktionsvoraussetzung
   b) Induktionsbehauptung
   c) Induktionsbeweis

Beispiel:

$\forall\, n \in \aleph: 2^n > n$

1. Induktionsanfang $n = 0$, $2^0 = 1 > 0$ (w)
2. Induktionsschritt
   a) Induktionsvoraussetzung
      $2^n > n$ wahr für ein beliebiges $n \in \aleph$
   b) Induktionsbehauptung
      zu zeigen: $2^{n+1} > n+1$
   c) Induktionsbeweis
      $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n = n+n \geq n+1$

ACHTUNG! Der Induktionsanfang ist wichtig!

2 Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften

Funktionen können dargestellt werden in
- verbaler Form: z.B.: jedem zugelassenem Fahrzeug ist eindeutig ein Kennzeichen zugeordnet
- tabellarischer Form
- Form einer mathematischen Gleichung $y = f(x)$ mit der unabhängigen Variablen x (Argument, Urbild), der abhängigen Variablen y (Funktionswert, Bild), dem $Db = \{ x \mid \exists y : y = f(x) \}$ und dem $Wb = \{ y \mid \exists x : y = f(x) \}$

Eigenschaften:
Definition:
(1) f(x) heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Konstante k_1 gibt, so dass $f(x) \le k_1 \ \forall x \in Db$
(2) f(x) heißt nach unten beschränkt, wenn es eine Konstante k_1 gibt, so dass $f(x) \ge k_1 \ \forall x \in Db$
(3) f(x) heißt monoton wachsend, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2) \ \forall x_1, x_2 \in Db$
(4) f(x) heißt monoton fallend, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2) \ \forall x_1, x_2 \in Db$
(5) f(x) heißt streng monoton wachsend, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \ \forall x_1, x_2 \in Db$
(6) f(x) heißt streng monoton fallend, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \ \forall x_1, x_2 \in Db$
(7) f(x) heißt gerade, wenn $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in Db$
(8) f(x) heißt ungerade, wenn $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in Db$
(9) f(x) heißt periodisch, wenn es ein t gibt, so dass $f(x) = f(x+t) \ \forall x \in Db$

$y = f(x)$ sei injektiv, dann ist auch die Umkehrfunktion wieder eine Funktion $y=f^{-1}(x)$

Eindeutigkeit von f: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ bzw. $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$
Eindeutigkeit der Umkehrfunktion: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ bzw. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
Zusammengefasst: $y=f(x)$ eindeutig $\Leftrightarrow (x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$
Deshalb sind streng monotone Funktionen injektiv.

Um die Umkehrfunktion zu einer gegebenen Funktion zu finden, zerlegt man diese zunächst in Monotonieintervalle und suche in jedem Monotonieintervall die jeweilige Umkehrfunktion.
Dazu $y = f(x)$ nach x umstellen $\Rightarrow x = f^{-1}(y)$ (der selbe Graph wie $y = f(x)$)
Tauschen der Variablen $\Rightarrow y = f^{-1}(x)$

2.1 Potenzfunktionen, Wurzelfunktionen

Definition: $y = f(x) = x^n = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ (n Faktoren) $x \in \Re$, $n \in \aleph$, $n \neq 0$

Definition: $x \ge 0, y \ge 0 \Rightarrow y = (x)^{(1/n)} \Leftrightarrow y^n = x$

Begründung für positive Vorzeichen:
1. n ist gerade $\Rightarrow$ für negative x keine Werte, für positive x 2 Werte
2. n ist ungerade $\Rightarrow$ wäre möglich, aber bei den Rechenregel müsste zwischen geraden und ungeraden Potenzen unterschieden werden

<u>Wie erfasst man $(-2)^3 = -8$?</u>
1) Bei geradem n: $x \le 0 \Rightarrow y = x^n = (-x)^n \Rightarrow y^{1/n} = -x \Rightarrow x = -(y^{1/n}) \Rightarrow y = -(x^{1/n})$
2) Bei ungeradem n: $x \le 0 \Rightarrow -y = -x^n = (-x)^n \Rightarrow (-y)^{1/n} = -x \Rightarrow x = -(-y^{1/n}) \Rightarrow y = -((-x)^{1/n})$

Definition: $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, $x \ge 0$, $m,n \in \aleph$, $n \neq 0$

Satz: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^m \cdot b^m = (ab)^m$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $a^{-m} = 1/(a^m)$

2.2 Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion

Definition: $y=a^x$ Exponentialfunktion, $a>0$, $a \neq 1$ (Abb. 3)

Definition: $x = \log_a y \Leftrightarrow a^x = y$, $a>0$, $a \neq 1$, $y > 0$ (Abb. 4)

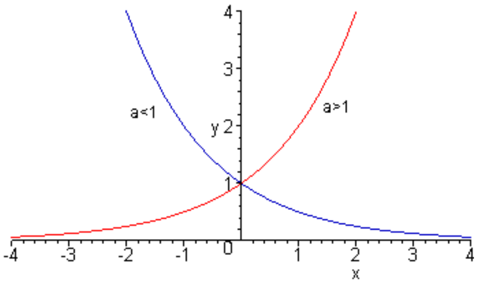


Abb. 3

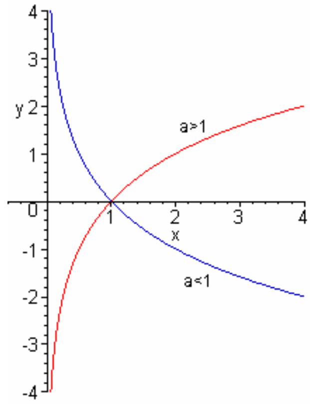


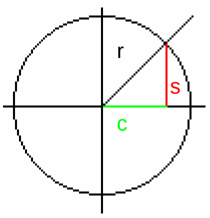
Abb. 4

Rechenregeln:

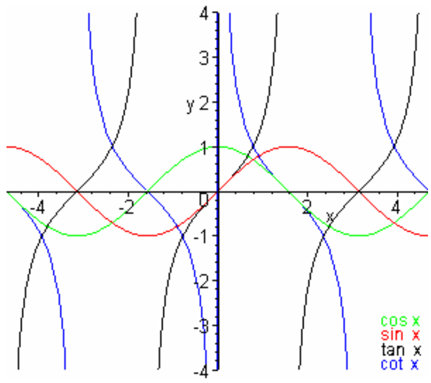
$\log_a u \cdot v = \log_a u + \log_a v$
$\log_a u / v = \log_a u - \log_a v$
$\log_a u^n = n \log_a n$
$a = e^{\ln a}$
$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a} = b^{x (\ln a / \ln b)}$
$\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$

2.3 Winkelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen

Definition: 360° entsprechen 2π im Bogenmaß



Definition: Winkelfunktionen
$\sin x = s/r$
$\cos x = c/r$
$\tan x = s/c$
$\cot x = c/s$



$\tan x = (\sin x)/(\cos x) = 1/(\cot x)$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Monotonien: sin: $[-\frac{1}{2}\Pi + 2k\Pi, \frac{1}{2}\Pi + 2k\Pi]$ streng monoton fallend

$[\frac{1}{2}\Pi + 2k\Pi, \frac{3}{2}\Pi + k\Pi]$ streng monoton steigend

cos: $[2k\Pi, 2\Pi + 2k\Pi]$ streng monoton fallend

$[\Pi + 2k\Pi, 2\Pi + 2k\Pi]$ streng monoton steigend

$\sin x = -\sin(-x)$
$\cos x = \cos(-x)$
$\tan x = -\tan(-x)$
$\cot x = -\cot(-x)$

Grad	0°	30°	45°	60°	90°
Bogen	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	1/2	$1/2 \cdot 2^{1/2}$	$1/2 \cdot 3^{1/2}$	1
cos	1	$1/2 \cdot 3^{1/2}$	$1/2 \cdot 2^{1/2}$	1/2	0
tan	0	$1/(3^{1/2})$	1	$3^{1/2}$	–
cot	–	$3^{1/2}$	1	$1/(3^{1/2})$	0

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta +/- \cos\alpha \sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta -/+ \sin\alpha \sin\beta$
$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\tan(\alpha + \beta) = (\tan\alpha + \tan\beta)/(1 - \tan\alpha + \tan\beta)$
$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin((\alpha + \beta)/2) \cos((\alpha + \beta)/2)$

3 Folgen, Reihen, Grenzwerte

3.1 Zahlenfolgen

Schreibweise: $\{ a_1, a_2, \dots \}$ oder $\{ a_n \}_{n=1}$

Definitionen:

1) Abbildung aus der Menge $\aleph$ in die Menge $\Re$
2) $\{ a_n \}$ ist beschränkt, wenn es ein $K \in \Re$ so gibt, dass $\forall n\ |a_n| \leq K$
3) $\{ a_n \}$ ist monoton steigend, wenn $a_n \leq a_{n+1}, \forall n$
4) $\{ a_n \}$ ist monoton fallend, wenn $a_n \geq a_{n+1}, \forall n$
5) Eine Zahlenfolge konvergiert gegen $a \in \Re$ wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$; a ist Grenzwert.
   Als Formel: $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall\ n \geq n_0\ |a_n - a| < \varepsilon$
6) $\bar{a}$ ist Häufungspunkt von $\{a_n\}$ wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele Glieder $|a_n - \bar{a}| < \varepsilon$ gibt.

Beispiele: $\{(-1)^n\}_{n=1}$ $\Rightarrow$ 2 Häufungspunkte (-1,1)
$\{1/n\}_{n=1}$ $\Rightarrow \lim_{n\to} 1/n = 0$ $\Rightarrow |(1/n)-0| = 1/n < \varepsilon$ $\Rightarrow$ Die Folge konvergiert gegen 0

3.2 Konvergenzsätze

Cauchy-sches Konvergenzkriterium

$\{a_n\}$ konvergent $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall\ m,n \geq n_0\ |a_m - a_n| < \varepsilon$

Satz: Jede konvergente Folge ist beschränkt
Satz: Eine monotone Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist

3.3 Unendliche Reihen

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{i=1} a_i$

$s_1 = a_1$
$s_2 = a_1 + a_2$
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$
…
$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$
$\{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ Partialsummenfolge

$s = \lim_{n\to} s_n = \sum_{i=1} a_i$

Cauchy Kriterium: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 : \forall m,n \geq n_0 \left| \sum_{i=m}^{n} a_i \right| < \varepsilon$

notwendiges Konvergenzkriterium: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ist konvergent $\Rightarrow \lim_{n\to} \; a_n = 0$

alternierende Reihe: $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i$, $a_n \geq 0$

Leibnitz-Kriterium: $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i$, konvergent $\Leftrightarrow \lim_{n\to} \; a_n = 0$ und $a_{n+1} \leq a_n$

geometrische Reihen: $\sum_{n=1} aq^n$

Grenzwerte:

$\frac{aq}{1-q}$	für $0 \leq \lvert q \rvert < 1$
unbestimmt divergent	für $q \leq -1$
$\pm$	für $q>=1$, $a>0$ bzw. $a<0$

3.4 Unendliche Reihen mit nicht negativen Gliedern

Satz: Majorantenkriterium

Σa_n, Σb_n, $a_n < b_n$ für alle $n \geq n_0$

1. Σb_n konvergent $\Rightarrow$ Σa_n konvergent
2. Σa_n divergent $\Rightarrow$ Σb_n divergent

Beispiele:

1. $\Sigma 1/n^x$, $0<x<1$
   $1/n^x > 1/n$, $n>1$ $\Rightarrow$ divergiert
2. $\Sigma 1/(3+2^n) < \Sigma 1/(2^n) = \Sigma (1/2)^n = \Sigma aq^n \Rightarrow$ Reihe ist konvergent

Satz: Quotientenkriterium

Σa_n, $\lim (a_{n+1})/(a_n)$ $< 1 \Rightarrow$ konvergent
$= 1 \Rightarrow$??
$> 1 \Rightarrow$ divergent

$(a_{n+1})/(a_n) \leq q < 1 \quad \forall\, n \geq n_0 \Rightarrow$ konvergent

Beispiele:

1. $3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} n!}{(n+1)! 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^n}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{3+2^n}{3+2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\left(\frac{3}{2^n}\right)+1}{2^n\left(\frac{3}{2^n}\right)+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{2^n}\right)+1}{\left(\frac{3}{2^n}\right)+2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2} <1 \Rightarrow$ Reihe konvergiert

Satz: Wurzelkriterium

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} <1 & \text{Reihe konvergiert} \\ =1 & \text{keine Aussage möglich} \\ >1 & \text{Reihe divergiert} \end{cases}$$

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{(\ln(n))^n},\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\pi}}{\ln(n)} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1 \Rightarrow \text{Reihe konvergiert}$$

Definition: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent aber **nicht** absolut konvergent, da $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist divergent ist

Satz: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent

Satz: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Leftrightarrow$ Reihenfolge der Glieder kann beliebig(!) geändert werden, ohne dass sich an der Konvergenz oder der Summe etwas ändert

Bemerkung: Bei konvergenten, aber nicht absolut konvergenten Reihen können die Glieder so umgeordnet werden, dass die Reihe gegen jeden beliebigen vorgegebenen Grenzwert konvergiert

Definition: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$ ist jede Reihe, die aus allen möglichen Produkten $a_k b_l$ gebildet wird

Satz: Cauchy

Sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ absolut konvergent, so konvergiert auch jedes Ihrer Produkte absolut.

Diese haben die selbe Summe und es gilt: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{n} a_s b_{n-s}\right)$

4 Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

4.1 Grenzwerrte von Funktionen

Beispiel:

Sei $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Für die Folge $x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ ist $f(x_n) = 1 \Rightarrow$ Die Folge $\{f(x_n)\}$ konvergiert gegen 1.

Für die Folge $x_n = \frac{2}{(4n+3)\pi}$ ist $f(x_n) = -1 \Rightarrow$ Die Folge $\{f(x_n)\}$ konvergiert gegen -1.

Für die Folge $x_n = \frac{1}{n\pi}$ ist $f(x_n) = 0 \Rightarrow$ Die Folge $\{f(x_n)\}$ konvergiert gegen 0.

Definition: Die Funktion f(x) sei in einer Umgebung von $\bar{x}$ definiert, dann hat f(x) an der Stelle $\bar{x}$ den Grenzwert g, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $| f(x) - g | < \varepsilon \ \forall | x - \bar{x} | < \delta$

4.2 Stetigkeit

Definition: f(x) heißt in $\bar{x}$ stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $| f(x) - f(\bar{x}) | < \varepsilon \ \forall | x - \bar{x} | < \delta$. Eine Funktion heißt in einer Menge $M \subseteq D(f)$ stetig, wenn sie in jedem Punkt $\bar{x} \in M$ stetig ist.

Satz: f(x) ist in $\bar{x}$ genau dann stetig, wenn $\lim\limits_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$

Arten der Unstetigkeit: hebbare Lücke, Polstellen, Sprünge

5 Differentialrechnung

5.1 Differenzierbarkeit, Differentiationsregeln

Beispiel:

$f(x) = ax + b$

x_0, x_1, $f(x_0)$, $f(x_1)$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{(ax_1 + b) - (ax_0 + b)}{x_1 - x_0} = \frac{a(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = a$$

Beispiel:

$f(x)=x^2$

$x_0 = 1,\ x_1 = 2 \quad \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 3$

$x_0 = 1,\ x_1 = 3 \quad \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 4$

$x_0 = 1,\ x_1 = 1{,}01 \quad \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 2{,}01$

$$\lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$$

Definition: f(x) heißt an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

existiert (d.h. wenn man für jede Argumentfolge $x \rightarrow x_0$ denselben Grenzwert erhält). Der Grenzwert heißt dann Ableitung von f an der Stelle x_0, f heißt in x_0 differenzierbar.

Satz: $(c_1f_1(x)+ c_2f_2(x))' = c_1f_1'(x)+ c_2f_2'(x)$
Satz: $(f_1(x)\, f_2(x))' = f_1'(x)\, f_2(x) + f_1(x)\, f_2'(x)$

Beweis:
$$\lim_{h\to\infty}\frac{f_1(x+h)f_2(x+h)-f_1(x)f_2(x)}{h}=$$
$$\lim_{h\to\infty}\frac{f_1(x+h)f_2(x+h)-f_1(x+h)f_2(x)+f_1(x+h)f_2(x)-f_1(x)f_2(x)}{h}=$$
$$\lim_{h\to\infty}f_1(x+h)\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}+\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}f_2(x)= f_1(x)\, f_2'(x) + f_1'(x)\, f_2(x)$$

logarithmisches Ableiten

$y = f(x)^{g(x)}$
$\ln(y(x)) = g(x) \ln(f(x))$
$$\frac{y'(x)}{y(x)}=g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$$
$$y'(x)=y(x)\left(g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

Beispiel:
- $x^x = (\ln(x) + 1)\, x^x$
- $\sqrt[x]{x}=\left(-\frac{1}{x^2}\cdot\ln(x)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)\sqrt[x]{x}=\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\ln(x)}{x^2}\right)\sqrt[x]{x}$

Satz von Rolle:
Sei f(x) eine im Interval [a,b] stetige und in (a,b) differenzierbare Funktion.
Ist dann f(a) = f(b) so existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$

Mittelwertsatz der Differentialrechnung:
Ist f(x) im Interval [a,b] stetig und in (a,b) differenzierbar, so gibt es ein ein $x_0 \in (a,b)$ mit
$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Bemerkung: andere Schreibweise
$f(b) = f(a) + (b – a)\, f'(a + \delta(b-a))$

Beweis: Rückführung auf Satz von Rolle

$g(x) = f(x) – f(a) – (x – a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$g(a) = g(b) \Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b) : g'(x_0) = 0$

$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

l' Hospital-sche Regeln:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{wenn } \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existiert}$$

Es muss ein unbestimmter Ausdruck sein! Zähler und Nenner getrennt ableiten!

Unbestimmte Ausdrücke: $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $0\cdot\infty=\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$; $1^{\infty}=e^{0\cdot\infty}$; $\infty-\infty=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty\cdot\infty}}$

Beispiel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{2}=-\frac{1}{2}$$

← l' Hospital darf mehrmals angewendet werden

5.2 Kurvendiskussion

Symmetrie

Gerade Funktionen (Symmetrisch zur y-Achse)

$f(x) = f(-x)$

Ungerade Funktionen (Punktsymmetrisch zum Ursprung)

$f(x) = -f(-x)$

Extrema:

Definition:

x_0 = lokales Maximum von $f(x)$, wenn $f(x) \le f(x_0)$ $\forall x$ aus einer Umgebung von x_0

x_0 = lokales Minimum von $f(x)$, wenn $f(x) \ge f(x_0)$ $\forall x$ aus einer Umgebung von x_0

Sei $f(x)$ in - < x < differenzierbar

notwendige Bedingung: $f'(x_0) = 0$

hinreichende Bedingung: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0)$ 0

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ Minimum $\qquad$ $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ Maximum

Wendepunkte:

Sei $f(x)$ in - < x < differenzierbar

notwendige Bedingung: $f''(x_0) = 0$

hinreichende Bedingung: $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0)$ 0

$f'''(x_0) > 0 \Rightarrow$ rechts-links Wendepunkt $\qquad$ $f'''(x_0) < 0 \Rightarrow$ links-rechts Wendepunkt

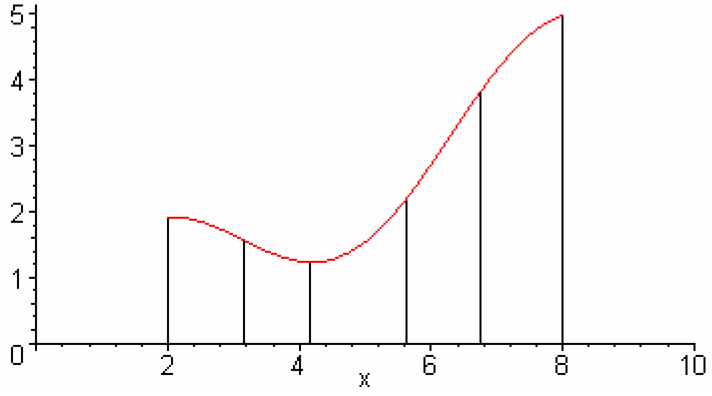
Hinweis: Wenn $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(k)}(x_0)$ 0, dann

wenn k gerade:	$f^{(k)}(x_0) > 0$	$\Rightarrow$ Minimum
	$f^{(k)}(x_0) < 0$	$\Rightarrow$ Maximum
wenn k ungerade:	$f^{(k)}(x_0) > 0$	$\Rightarrow$ rechts-links Wendepunkt
	$f^{(k)}(x_0) < 0$	$\Rightarrow$ links-rechts Wendepunkt

Polstellen: (siehe Grenzwerte)

$y=\frac{f(x)}{g(x)}$ mit $g(x_0) = 0$ und $f(x_0)$ 0 : Polstelle bei x_0

6 Integralrechnung



$$\int_0^{2\pi} \sin(x)dx = -\cos(x)\Big|_0^{2\pi} = -1+1=0$$

$\Rightarrow$ Integral $\neq$ Flächeninhalt

6.1 bestimmtes Integral

Definition: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f(x_i)h_i$

6.2 unbestimmtes Integral

Definition: $F(x) = \int_a^x f(t)dt \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

Bemerkung: (1) F(x) ist nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt
(2) Ein bestimmtes Integral ist eine reelle Zahl
(3) Ein unbestimmtes Integral ist eine Funktion
(4) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

6.3 Grundintegrale

$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$ $\quad$ $\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln(a)} a^x + c$ $\quad$ $\int e^x \, dx = e^x + c$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ $\quad$ $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$ $\quad$ $\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$

$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$ $\quad$ $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = \cot(x) + c$ $\quad$ $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arctanh}(x) + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} dx = \arcsin(x) + c$ $\quad$ $\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} dx = \operatorname{arcsinh}(x) + c$ $\quad$ $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

6.4 Integrationsmethoden

6.4.1 Substitution

(beruht auf Kettenregel)

F'(x) = f(x)

$\frac{d}{dx} F(\partial(x)) = F'(\partial(x)) \cdot \partial'(x)$

Integrieren: $F(\partial(x)) + c = \int f(\partial(x)) \cdot \partial'(x) \, dx$

Beispiel:

$\int \frac{1}{x\ln(x)} dx$ $\qquad$ Substitution: $u = \ln(x)$; $u' = \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$$= \int \frac{1}{xu} x du = \int \frac{1}{u} du = \ln(u) + c$$

$$= \ln|\ln(x)| + c$$

6.4.2 Partialbruchzerlegung

$\int \frac{Pn(x)}{Qm(x)} dx$ mit der Bedingung: n < m

Wenn m = n Polynomdivision durchführen.

Beispiel:

$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 3} = 1 - \frac{3x + 2}{x^2 + x + 3}$ jetzt ist n < m

$\Rightarrow$ genauso bei n > m

Nullstellen von Qm bestimmen		Ansätze:
x_1	einfache reelle Nullstelle	$\frac{A}{x - x_1}$
x_2	mehrfache reelle Nullstelle	$\frac{A_1}{x - x_2} + \frac{A_2}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x - x_2)^k}$
x_3	einfache komplexe Nullstelle	$\frac{Ax + B}{x^2 + px - q}$
x_4	mehrfache komplexe Nullstelle	$\frac{A_1 x + B_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + p_2 x + q_2)^2} + \ldots + \frac{A_k x + B_k}{(x^2 + p_k x + q_k)^k}$

Beispiel:

$\int \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2 \cdot (x+2)} dx$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2 \cdot (x+2)} &= \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} \\
x^2 - x + 1 &= A(x-1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2) \\
&= \ldots \\
&= x^2(A + B) + x(-2A + B + C) + (A - 2B + 2C)
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
1 &= A + B \\
-1 &= -2A + B + C \\
1 &= A - 2B + 2C
\end{aligned}$$

Gleichungssystem lösen

$A = \frac{7}{9}$

$B = \frac{2}{9}$

$C = \frac{1}{3}$

$$= \int \frac{7}{9} \frac{1}{(x+2)} dx + \int \frac{2}{9} \frac{1}{(x-1)} dx + \int \frac{1}{3} \frac{1}{(x-1)^2} dx = \frac{7}{9} \ln|x+2| + \frac{2}{9} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} + k$$

6.4.3 Partielle Integration

Herleitung: Kettenregel

$(uv)' = u'v+uv'$

$$uv = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx$$

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$$

Beispiel:

$$\int x\cos(x)dx$$

$$= x\cdot(-\sin(x)) + \int \sin(x)dx$$

$$= x\cdot\sin(x) + \cos(x) + c$$

Digital unterschrieben von Michael Telgkamp

Unterschrift nicht bestätigt

Das war das wichtigste vom Mathe-Abiturwissen, für weitere Fragen oder Fehlermeldungen bitte E-mail an telgkamp@informatik.uni-halle.de !